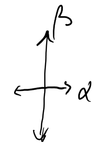
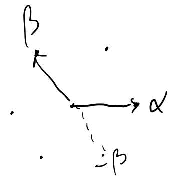
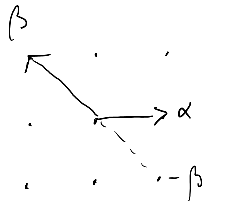
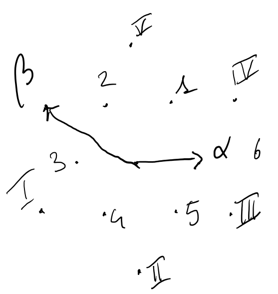
Es. 1:  $s_\alpha s_\beta = s_\beta s_\alpha, \quad (s_\alpha s_\beta)(s_\alpha s_\beta) = Id$



$(s_\alpha s_\beta)^3(\alpha) = \alpha \qquad (s_\alpha s_\beta)^3(\beta) = \beta \quad (\Leftrightarrow s_\alpha s_\beta s_\alpha = s_\beta s_\alpha s_\beta)$



$(s_\alpha s_\beta)^4(\alpha) = \alpha \qquad (s_\alpha s_\beta)^4(\beta) = \beta$



$(s_\alpha s_\beta)^6(\alpha) = \alpha \qquad (s_\alpha s_\beta)^6(\beta) = \beta$

Es. 2: Verifica ovvia degli assiomi.

Es. 3: Altra verifica ovvia degli assiomi, visto che s_α è un'isometria $\forall \alpha \in \Phi$.

Es. 4: 1) $L = sl(n)$.

Δ è una base di H^*: facile. Inoltre se $i<j$

la radice $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ si scrive come

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j = (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) + (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+2}) + \dots + (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j) \quad (\text{coeff. tutti } \geq 0!)$$

quindi è una radice positiva. E l'opposto $\varepsilon_j - \varepsilon_i$ è ovviamente negativa

2) Le radici del tipo $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ si trattano come nel caso precedente, invece con i, j qualsiasi abbiamo

$$\varepsilon_i + \varepsilon_j = (\varepsilon_i - \varepsilon_m) + (\varepsilon_j - \varepsilon_m) + 2\varepsilon_m \quad (\text{è positiva})$$

3) Le radici del tipo $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ si trattano come nel caso 1), invece per $i \neq j$ abb.

$$\varepsilon_i = (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) + (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+2}) + \dots + (\varepsilon_{m-1} - \varepsilon_m) + \varepsilon_m$$

e ε_j analogo, da cui otteniamo anche $\varepsilon_i + \varepsilon_j$.

4) Le radici del tipo $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ si trattano come nel caso 1), invece per $i < j$ abb.

$$\varepsilon_i + \varepsilon_j = \underbrace{(\varepsilon_i - \varepsilon_{m-1})}_{=0 \text{ se } \begin{cases} i = m-1 \\ j = m \end{cases}} + \underbrace{(\varepsilon_j - \varepsilon_m)}_{=0 \text{ se } j = m} + (\varepsilon_{m-1} + \varepsilon_m)$$

5) Calcolo facile.

ES. 5: Il gruppo simmetrico agisce in modo naturale su $\tilde{E} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ con $\underset{S_n}{\sigma}(\varepsilon_i) = \varepsilon_{\sigma(i)}$ $\forall i$. L'azione è fedele.

E è gen. da $\Phi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i \neq j\}$, segue facilmente che E coincide con il S_n-sottomodulo $\{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n \mid a_1 + \dots + a_n = 0\} = E \subseteq \tilde{E}$.

C'è un altro S_n-sottomodulo $F \subseteq \tilde{E}$: $F = \{a_1\varepsilon_1 + \dots + a_n\varepsilon_n \mid a_1 = a_2 = \dots = a_n\}$. Vale $\tilde{E} = E \oplus F$ e S_n agisce in modo banale su F. Segue: l'az. di S_n su E è fedele, cioè $S_n \hookrightarrow GL(E)$.

Calcoliamo ora $s_{\varepsilon_1-\varepsilon_2} \in W$:

$$s_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(\varepsilon_1-\varepsilon_2) = \varepsilon_2-\varepsilon_1$$

$$s_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(\varepsilon_2-\varepsilon_3) = (\varepsilon_2-\varepsilon_3) - \frac{2\overbrace{(\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_2-\varepsilon_3)}^{-1}}{\underbrace{(\varepsilon_1-\varepsilon_2, \varepsilon_1-\varepsilon_2)}_{2}}(\varepsilon_1-\varepsilon_2) =$$

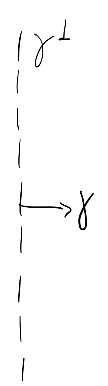
$$= (\varepsilon_2-\varepsilon_3) + (\varepsilon_1-\varepsilon_2) = \varepsilon_1-\varepsilon_3$$

$$s_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(\varepsilon_3-\varepsilon_4) = \varepsilon_3-\varepsilon_4$$

$$\vdots$$

$$s_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n) = \varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n$$

Cioè $s_{\varepsilon_1-\varepsilon_2}$ agisce come $(1\ 2) \in S_n$. Analogam. $s_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}$ agisce come $(i\ \ i+1) \in S_n$. Allora W contiene l'immagine (isomorfa) di S_n in $GL(E)$, e visto che W è generato da $s_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}$ $\forall i$ otteniamo $W \cong S_n$.

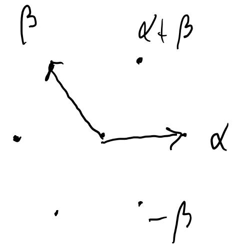


Es. 6: $\sigma \in W$ riflessione risp. a $\gamma \in E \setminus \{0\}$.

Supp. $\gamma^\perp \cap E^{reg} \neq \emptyset$: allora un vettore qualsiasi nell'intersezione è fissato da σ ed è in una camera di Weyl: segue $\sigma = Id_E$, assurdo.

Allora $\gamma^\perp \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Phi} \alpha^\perp$, da cui $\gamma^\perp \subseteq \alpha^\perp$ per una $\alpha \in \Phi$.

Es. 7:



Φ di tipo A_2, $\Delta = \{\alpha, \beta\}$

$\Delta' = \{\alpha+\beta, -\beta\}$

Allora $s_\alpha \in W$ è riflessione semplice per Δ, quindi ha lungh. $= 1$ risp. a Δ.
Ma s_α non è riflessione semplice risp. a Δ', perché né α né $-\alpha$ sono in Δ'. Segue: s_α ha lungh. > 1 rispetto a Δ'.

Es. 8: Δ e $-\Delta$ sono basi diverse, ma hanno lo stesso insieme di riflessioni semplici perché $s_\alpha = s_{-\alpha}$ $\forall \alpha \in \Delta$.

Es. 9: Sia $p \in E$, $\gamma \in E^{reg}$ tale che $\Delta(\gamma) = \Delta$, e scegliamo $w \in W$ tale che $(w(p), \gamma)$ sia massimo.
Dim. che $(w(p), \alpha) \geq 0$ $\forall \alpha \in \Delta$. Per assurdo, supp. $(w(p), \alpha) < 0$.

Allora $$(s_\alpha w(p), \gamma) = \left(w(p) - \frac{2(w(p),\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha, \gamma\right) =$$

$$= (w(p), \gamma) - \underbrace{(w(p), \alpha)}_{<0} \cdot \underbrace{\frac{2}{(\alpha,\alpha)} \cdot (\alpha, \gamma)}_{>0} > (w(p), \gamma)$$

Assurdo per massimalità di $(w(p), \gamma)$.